# 拡大の同型類の個数について(環の表現とDuality)



浅芝, 秀人

数理解析研究所講究録
628巻 1987年 23-26



# 拡大の同型類の個数について

大阪市立大学理学部　浅芝秀人　(Hideto Asashiba)

k を代数的閉体とし、考える多元環および加群はすべて k上有限次元とする。 A を多元環、X,Z を右A-加群とするときX の Zによる拡大 eとは、つぎの形の右A-加群の完全系列のことである：

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha(e)} M(e) \xrightarrow{\beta(e)} Z \longrightarrow 0 \text{ 。}$$

X の Zによる拡大【分裂しない拡大】の全体を EXT(Z,X) 【ext(Z,X)】で表す。EXT(Z,X)の元 e,f にたいして、e と f が同型（$e \cong f$）であるとは、同型写像 $\gamma: X \to X$、$\delta: M(e) \to M(f)$ および $\varepsilon: Z \to Z$ が存在して、$\delta \cdot \alpha(e) = \alpha(f) \cdot \gamma$ かつ $\varepsilon \cdot \beta(e) = \beta(f) \cdot \delta$ となることである。また e と f が合同（$e \equiv f$）であるとは、e と f が $\gamma$=「X の恒等写像」と $\varepsilon$=「Z の恒等写像」によって同型であることをいう。拡大群 $\mathrm{Ext}^1(Z,X)$ は EXT(Z,X) のなかの合同類の全体とみなすことができる。そこで EXT(Z,X) の各元 e にたいして、$(e) := \{f \in \mathrm{EXT}(Z,X) \mid e \equiv f\} \in \mathrm{Ext}^1(Z,X)$ とおく。ext(Z,X)のなかの拡大の同型類の個数を n(Z,X) で表し、ext(Z,X)のなかの同値関係 $M(e) \cong M(f)$ を法とする同値類の個数を n'(Z,X) で表す。「$e \equiv f$」⇒「$e \cong f$」⇒「$M(e) \cong M(f)$」より、
$n'(Z,X) \leqq n(Z,X) \leqq$「 $\mathrm{Ext}^1(Z,X) \setminus \{0\}$ の濃度」が分かる。

さてよく知られているように、単純右A-加群 X,Z にたいして $[\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k] > 1$ ならば、n(Z,X) も n'(Z,X) も無限である。ただし [V : k] はk-ベクトル空間 V の k-次元を表す。他方［2,29ページ］によれば、ある多元環 A とその上の直既約右加群 X,Z が存在して、$n'(Z,X) = n(Z,X) = [\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k]$ （＝2）となる。そこで、いつこれらの数 n'(Z,X)、n(Z,X)、$[\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k]$ が有限となって一致するか、という問題を考える。結果はつぎの定理と、最後の例で与えた。

定理。 X と Z をある多元環 A上の直既約右加群とすると、つぎは同値である：
(1) $n(Z,X) < \infty$。
(2) $\mathrm{Ext}^1(Z,X)$ は $(\mathrm{End}_A X, \mathrm{End}_A Z)$ －両側加群として単列である。
(3) $n(Z,X) = [\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k]$ 。
(4) $n'(Z,X) = n(Z,X) = [\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k]$ 。

この定理を証明するために以下、３つの補題を用意する。最初の補題は定義から明らかである。環 $R$ の単元全体を $R^*$ で表し、単位元を $1_R$ で表す。

<u>補題１</u>。 $A$ を多元環、 $X,Z$ を右 $A$－加群とする。各 $e,f\in \mathrm{ext}(Z,X)$ についてつぎは同値である：

(1) $e \cong f$。

(2) $(f) = \phi(e)\Psi$ となる $\phi\in(\mathrm{End}_A X)^*$ と $\Psi\in(\mathrm{End}_A Z)^*$ が存在する。

<u>補題２</u>。（Cf. ［３］，［１］） $A$,【$B$】を basic多元環とし、$J$,【$N$】をそのジャコブソン根基とする。単列 $(A,B)$－両側加群 $U=AxB$ にたいして、$JU\geqq UN$【$JU\leqq UN$】ならば、 $U=Ax$【 $U=xB$】で、$U$ は単列左 $A$－【右 $B$－】加群である。それのただ１つの組成列は、$(A,B)$-両側加群としての $U$ のただ１つの組成列と一致する。

<u>証明</u>。対称性から、$JU\geqq UN$ の場合だけを考えれば十分である。すべての $(A,B)$－両側加群を自然に $C := A\otimes_k B^{op}$ 上の左加群とみなす。$W$ を $C$ のジャコブソン根基として、 $WS = JS + SN$ がすべての $(A,B)$－両側加群 $S$ にたいして成り立つことに注意すると、$JU\geqq UN$ より $W^iU = J^iU$ （$\forall\ i\geqq 0$）が出る。これより（ $C$ が仮定からbasic となることを使って、）$[J^iU/J^{i+1}U: k] \leqq 1$ （$\forall\ i\geqq 0$）となる。よって ${}_AU$ はただ１つの組成列 $(J^iU)_i = (W^iU)_i$ をもつ。さてもし $U\neq Ax$ とすると、 $X\in JU = WU$。すると $AxB = Cx \leqq WU < U$ となって矛盾。　　//

<u>補題３</u>。$A,B$ を局所多元環、$M$ を $(A,B)$－両側加群、$L$ を $M$ の $(A,B)$－両側部分加群で $M/L$ が半単純 $(A,B)$－両側加群 $(\neq 0)$となるものとする。すると $M\setminus L$ の各元 $x,y$にたいして、条件

(1) $y = axb$ , $\exists\ a\in A^*$ , $\exists\ b\in B^*$ 。

から条件

(2) $[y] \in k^*\cdot[x]$ （ただし $[t] := t + L,\ t = x,y$ ）。

が出る。さらに $L$ が単列 $(A,B)$－両側加群で $AxB$ に含まれているならば、逆に(2)から(1)が出る。

<u>証明</u>。補題２とその証明で使った記号をそのまま使うことにする。 $k$ が代数的閉体で $A$ も $B$ も局所多元環であるから、 $A^* = k^*1_A + J$ ，$B^* = k^*1_B + N$ となることに注意する。

(1)⇒(2)。上の注意から明らか。

(2)⇒(1)。C が局所多元環であるから、${}_C S := Cx = AxB$ はただ１つの極大部分加群 $WS$ をもつ。よって $L \leqq WS$。他方仮定より $S/L$ は半単純左C-加群であるから $L = WS$ となる。ゆえに ${}_C S$ は単列である。とくに $JS \geqq SN$ または $JS \leqq SN$ が成り立つ。一般性を失うことなく、$JS \geqq SN$ が成り立っているとしてよい。すると補題２より、$S = Ax$ で $L\ (= WS = JS) = Jx$ 。これより $k^*x + L = k^*x + Jx = A^*x$ となって証明が終わる。

<u>定理の証明</u>。$R_X := \mathrm{End}_A X$, $R_Z := \mathrm{End}_A Z$, $E := \mathrm{Ext}^1(Z,X)$ とおく。X も Z も直既約であるから、$R_X$ も $R_Z$ も局所多元環である。

$$(*) \qquad 0 = S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n = E$$

を $(R_X,R_Z)$－両側加群としての E の socle 列とする。各 $(e),(f) \in S_i \setminus S_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ にたいして、補題１と３をつかって、$e \cong f$ から $[(e)]_i \in k^* \cdot [(f)]_i$ が出る。ただし各 $g \in E$ にたいして $[(g)]_i := (g) + S_{i-1}$ とおいた。

(4)⇒(3)⇒(1)は明らか。

(1)⇒(2)。ある $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ で $[S_i/S_{i-1} : k] > 1$ となったとせよ。すると k上一次独立な２元 $[(e)]_i, [(f)]_i \in S_i/S_{i-1}$ がとれる。上の注意から、任意の $s,t \in k^*$ にたいして、$e + sf \cong e + tf \Rightarrow [(e)]_i + s[(f)]_i \in k^* \cdot ([(e)]_i + t[(f)]_i) \Rightarrow s = t$。よって $n(Z,X) \geqq$「$k^*$ の濃度」$= \infty$。

(2)⇒(4)。E を単列$(R_X,R_Z)$-両側加群とせよ。（＊）より $n = [E : k]$ 。各 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ にたいして $(e_i) \in S_i \setminus S_{i-1}$ を１つずつ選んでおく。このとき $S_i/S_{i-1} = k \cdot [(e_i)]_i$ となる。$n \leqq n'(Z,X)$ と $n(Z,X) \leqq n$ を示せばよい。

<u>$n(Z,X) \leqq n$ の証明</u>。各 $e \in \mathrm{ext}(Z,X)$ にたいして、ある $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ が存在して、$(e) \in S_i \setminus S_{i-1}$ となる。すると $(e) \in k^* \cdot (e_i) + S_{i-1}$。補題３を $M = S_i, L = S_{i-1}, x = e_i$ に適用すると、補題１より $e \cong e_i$ となる。

<u>$n \leqq n'(Z,X)$ の証明</u>。$e \in \mathrm{ext}(Z,X)$ を１つとる。e に $\mathrm{Hom}(Z,-)$ を作用させると、完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}(Z,X) \to \mathrm{Hom}(Z,M(e)) \to \mathrm{Hom}(Z,Z) = R_Z \xrightarrow{\delta} E$$

が得られる。ここで $\mathrm{Im}\,\delta = (e) \cdot R_Z$ であることに注意すると、

$$[(e)R_Z : k] = [R_Z : k] - [\mathrm{Hom}(Z,M(e)) : k] + [\mathrm{Hom}(Z,X) : k]。$$

そこで　$f \in \mathrm{ext}(Z,X)$ をとり、$M(e) \cong M(f)$　となったとせよ。すると上の式から
$[(e)R_Z : k] = [(f)R_Z : k]$；さらに双対的に、
$[R_X(e) : k] = [R_X(f) : k]$。
よって補題２より、
$$\begin{aligned}[R_X(e)R_Z : k] &= \max\{[R_X(e) : k],\ [(e)R_Z : k]\}\\ &= \max\{[R_X(f) : k],\ [(f)R_Z : k]\}\\ &= [R_X(f)R_Z : k]。\end{aligned}$$
結局　$R_X(e)R_Z = R_X(f)R_Z$ となる。以上のことを、$e = e_i$, $f = e_j$　に適用すると、$M(e_i) \cong M(e_j)$ から　$S_i = S_j$ が出て $i = j$　となる。　//

例。$n'(Z,X) \leqq n(Z,X)$ より　$n(Z,X) < \infty \Rightarrow n'(Z,X) < \infty$。しかしこの逆は一般には成り立たない。$n'(Z,X) < \infty$　であるが、$n(Z,X) = \infty$　となる例を挙げよう。$A^{op}$　をつぎの quiver で与えられる多元環とする：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[dl] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

$X$, $Z$　をそれぞれ dimension type が　$\begin{smallmatrix}0&0&0\\&1&\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1&1&1\\&1&\end{smallmatrix}$　となる直既約右 $A$－加群とする。すると $A$　が有限表現型で、どの $e \in \mathrm{ext}(Z,X)$ にたいしても $M(e)$ の dimension type は　$\begin{smallmatrix}1&1&1\\&2&\end{smallmatrix}$ であるから、$n'(Z,X) < \infty$　となる。しかし $n(Z,X) = \infty$　である。じっさい、Auslander-Reiten公式と $A$　が遺伝的であることから　$\mathrm{Ext}^1(Z,X) \cong D\mathrm{Hom}(X, \tau Z)$。よって、$[\mathrm{Ext}^1(Z,X) : k] = [\mathrm{Hom}(X, \tau Z) : k]$ = 「$\tau Z$ の dimension type $\begin{smallmatrix}1&1&1\\&2&\end{smallmatrix}$　の第４成分」= 2（$X$ が vertex 4 に対応する射影的直既約右 $A$- 加群であることに注意）。他方　$R_X = R_Z = k$ であるから　$\mathrm{Ext}^1(Z,X)$ は単列両側加群ではない。したがって定理より、$n(Z,X) = \infty$。

## References


[1] R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter and L. Salmerón: Representation-finite algebras and multiplicative bases, Invent. math. 81 (1985), 217-285.

[2] P. Gabriel: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Proc. Ottawa 1979, Springer Lect. Notes 831, 1-71.

[3] H. Kupisch: Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen. I, II, J. Reine Angew. Math. 219 (1965), 1-25; 245 (1970) 1-14.